Gewöhnliche Differentialgleichung: NWI
-Sophiane Yahiatene-

Satz 1. *(Satz von Picard-Lindelöf)*
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitz Stetiges Vektorfeld.
Dann gibt es durch jeden Punkt $u \in U$ eine lokal eindeutige Integralkurve.

Beweis. Da X lokal Lipschitz Stetig in U ist gilt:

$$\exists r > 0 : \overline{B_r(u)} \subseteq U \text{ und } \|X(v) - X(w)\| \leq L \|v - w\| \ \forall v, w \in B_r(u),$$

wobei $L > 0$ eine Lipschitzkonstante ist.
Wähle nun für $B := \overline{B_r(u)}$ ein $\epsilon_u > 0$ mit

i) $\epsilon_u L < 1$

ii) $\epsilon_u(\max_{v \in B} \|X(v)\|) < r$

Sei nun $0 < \epsilon < \epsilon_u$, so ist für dieses ϵ i)+ii) auch erfüllt.
Betrachte

$$E(\epsilon) := \{\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to U | \gamma \text{ stetig, } \gamma(0) = u\} \text{ und die Abbildung } d(\gamma_1, \gamma_2) := \max_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|.$$

Nach Aufgabe 3.2 bildet das Paar $(E(\epsilon), d)$ einen vollständigen metrischen Raum.
Definiere nun eine weitere Abbildung auf $E(\epsilon)$ durch

$$S : E(\epsilon) \to E(\epsilon),\ S(\gamma)(t) = u + \int_0^t X(\gamma(s))\mathrm{ds}.$$

S ist wohldefiniert und eine Kontraktion. Denn für alle $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in E(\epsilon)$ gilt

$$S(\gamma) \text{ ist stetig und es gilt } S(\gamma)(0) = u$$

$$\begin{aligned}
\|S(\gamma) - u\| &= \left\| \int_0^t X(\gamma(s))\mathrm{ds} \right\| \\
&\leq \int_0^t \|X(\gamma(s))\| \,\mathrm{ds} \\
&\leq \max_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \|X(\gamma(t))\| (t - 0) \\
&\leq \max_{v \in B} \|X(v)\| \epsilon \\
&< r \qquad\qquad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) \\
&\Rightarrow S(\gamma) \in E(\epsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(S(\gamma_1), S(\gamma_2)) &= \max_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \left\| \int_0^t X(\gamma_1(s)) - X(\gamma_2(s))\mathrm{ds} \right\| \\
&\leq \max_{s \in [-\epsilon, \epsilon]} \|X(\gamma_1(s)) - X(\gamma_2(s))\| \max_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} (t - 0) \\
&\leq \epsilon L \max_{s \in [-\epsilon, \epsilon]} \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\| \\
&\leq \epsilon L d(\gamma_1, \gamma_2) \qquad\qquad \epsilon L < 1, \text{ also ist S eine Kontraktion}
\end{aligned}$$

Nach Aufgabe 3.3 ist die Differentialgleichung

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t)), \gamma(0) = u$$

äquivalent zur Integralgleichung

$$\gamma(t) = u + \int_0^t X(\gamma(s))\mathrm{ds}$$

Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz (Aufgabe 3.1) existiert genau ein Fixpunkt von S, d.h. $(S^n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen ein $\gamma \in E(\epsilon)$ mit

$$S(\gamma)(t) = u + \int_0^t X(\gamma(s))\mathrm{ds} = \gamma(t).$$

Nach vorheriger Bemerkung löst γ die Differentialgleichung.
Nun kann man die Eindeutigkeit einfach aus der Eindeutigkeit des Fixpunkts folgern.

$\square$